Adı Soyadı: **06.02.2024**

CEVAP ANAHTARI

Numara:

MAT 211 ANALİZ III DERSİ BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1) $\int_{\pi}^{4\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x-\pi}}\,dx$ integralinin çeşidini ve karakterini belirleyiniz (10 puan).

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{3^{\frac{1}{n}}+9}$ serisinin karakterini belirleyiniz (10 puan).

3) $\|\cdot\|$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde Öklid normu olmak üzere $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $x \neq 0,\ y \neq 0$ olsun. Eğer

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

ise x ile y vektörlerinin dik vektörler olduğunu gösteriniz (15 puan).

4) $x \in [-5,5]$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n^3}\right)$ fonksiyon serisinin düzgün yakınsak olup olmadığını araştırınız (15 puan).

5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)!}{3^n} x^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını ve yakısaklık yarıçapını bulunuz (15 puan).

6) $\mathbb{R}^3$ de verilen $x_n = \left(\frac{(-1)^n}{n},\ \cos\frac{2}{n},\ \left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^n\right)$ genel terimli $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisinin karakterini belirleyiniz. (15 puan).

7) Aşağıda boş bırakılan yerleri doldurunuz (20 puan).

a) $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi bağlantılıdır. ...Yanlış..... (Doğru veya Yanlış yazınız).

$\mathbb{R}^n$ de her açık yuvar bağlantılıdır. ...Doğru....... (Doğru veya Yanlış yazınız) (8 puan).

b) $\mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^n$ ve boş küme kümeleri .hem...açık...hem de kapalı kümelerdir (4 puan).

c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y < 2\}$ kümesinin sınırı

$\partial A =$.$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=2\}$............. kümesidir (4 puan).

d) $\mathbb{R}^n$ de kompaktlık ile kapalılık ve sınırlılığı bağdaştıran teorem ......Heine-Borel................................ teoremidir (4 puan).

Not: Süre 90 dakikadır. **Dr. Erdem TOKSOY**

(1) $\forall x \in [\pi, 4\pi]$ için $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{x-\pi}}$ fonksiyonunu alalım

f fonksiyonu $x_0 = \pi$ de tanımsızdır

$$\lim_{x \to \pi^+} f(x) = \lim_{x \to \pi^+} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x-\pi}}$$

limitinde $x - \pi = u$ denirse $x \to \pi^+$ iken $u \to 0^+$ olup

$$\lim_{x \to \pi^+} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x-\pi}} = \lim_{u \to 0^+} \frac{\sin(u+\pi)}{u^{1/3}} = -\lim_{u \to 0^+} \frac{\sin u}{u^{1/3}} = \underbrace{\lim_{u \to 0^+} \frac{\sin u}{u}}_{1} \cdot \lim_{u \to 0^+} \frac{u}{u^{1/3}} = \lim_{u \to 0^+} u^{2/3} = 0$$

bulunur. O halde

$\displaystyle\int_{\pi}^{4\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x-\pi}}$ has integral olup sonlu bir değere sahiptir

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{3^{1/n}+9}$ serisinde $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$a_n = \dfrac{10}{3^{1/n}+9}$ olup $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{10}{3^{1/n}+9} = 1 \neq 0$

olup genel terim testi gereği $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{3^{1/n}+9}$ serisi ıraksaktır

(3) $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $x \neq 0$, $y \neq 0$ olmak üzere

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \dots (1)$

eşitliği sağlansın. Böylece

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle &= \langle x,x \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle + \langle y,y \rangle \\
&= \langle x,x \rangle + \langle x,y \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,y \rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x,y \rangle + \|y\|^2
\end{aligned}$$

olur. O halde (1) eşitliğinden

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y \rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

olup

$2\langle x,y \rangle = 0 \iff \langle x,y \rangle = 0$

bulunur. Bu takdirde x ile y vektörler dik vektörlerdir

(4) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $|\sin x| \le |x|$ olması kullanılırsa $\forall x \in [-5,5]$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\left|\sin \frac{x}{n^3}\right| \le \left|\frac{x}{n^3}\right| \le \frac{5}{n^3} = M_n$$

olup $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ p-serisi ve $p=3>1$ olduğundan yakınsaktır. O halde

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ serisi yakınsaktır. Böylece Weierstrass M-Kriteri

gereği $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n^3}\right)$ fonksiyon serisi düzgün yakınsaktır

(5) $x_0=0$ merkezli bir kuvvet serisidir. $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$a_n = \frac{(-1)^n (n+1)!}{3^n}$ alınırsa $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} (n+2)!}{3^n . 3}$ olur. R bu kuvvet serisinin

yakınsaklık yarıçapı olmak üzere

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n (n+1)!}{3^n}}{\frac{(-1)^{n+1} (n+1)! (n+2)}{3 . 3^n}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+2} = 0$$

bulunur. $R=0$ olduğundan verilen kuvvet serisi sadece $x_0=0$ da yakınsaktır.

(6) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = \cos\frac{2}{n}$, $c_n = \left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^n$

olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ serileri $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisinin

bileşen serilerinden $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{2}{n}$ serisini alalım.

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \cos\frac{2}{n} = 1 \neq 0$ olup genel terim testi gereği $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

serisi ıraksak ve dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisi ıraksaktır.